

# Methodische Aspekte der Analyse von Einkommensdiskriminierung

Ben Jann

ETH Zürich, jannb@ethz.ch

Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung  
Nürnberg, 22. Juni 2009

# Gliederung

- Einleitung
- Die Blinder-Oaxaca-Dekomposition
- Zwei methodische Aspekte
  - Das Index-Nummer-Problem
  - Statistische Inferenz
- Zusammenfassung

- Dass in den meisten westlichen Gesellschaften weiterhin bedeutende Lohnunterschiede zwischen Frauen und Männern bestehen, ist ein bekanntes Phänomen.
- Diese Unterschiede werden üblicherweise zumindest zum Teil auf Diskriminierung zurückgeführt.
- Ein beliebter statistischer Ansatz, um Lohnunterschiede zwischen Frauen und Männern (oder anderen Gruppen) zu analysieren, ist die kontrafaktische Dekomposition nach Blinder (1973) und Oaxaca (1973). Zu einer Meta-Analyse siehe Weichselbaumer und Winter-Ebmer (2005).

# Einleitung

- Ausgehend von aus der Humankapitaltheorie abgeleiteten Lohngleichungen (Mincer 1974) versucht die Blinder-Oaxaca-Zerlegung zwei zentrale Fragen zu beantworten:
  - ▶ Welcher Teil der Lohndiskrepanz kann durch Gruppenunterschiede bezüglich lohnwirksamer Merkmale erklärt werden?
  - ▶ Welcher Teil des Unterschieds ist auf andere Ursachen wie z.B. unterschiedliche Bildungsrenditen oder Lohndiskriminierung zurückzuführen?
- Es handelt sich allerdings um einen indirekten Ansatz, bei dem Diskriminierung lediglich als nicht erklärter Rest übrig bleibt. Das Verfahren kann also höchstens gewisse Indizien liefern.
- Auf allgemeiner Ebene kann der Ansatz zudem aufgrund einiger weiterer Punkte kritisiert werden (z.B. statische Betrachtungsweise, Beschränkung auf Mittelwerte).

# Einleitung

- Aber auch wenn wir die grundsätzliche Nützlichkeit des Verfahrens nicht anzweifeln, gilt es verschiedene methodische Probleme zu überwinden.
- Einige dieser Probleme können unter den folgenden Punkten zusammengefasst werden:
  - ▶ Das Index-Nummer-Problem
  - ▶ Statistische Inferenz
  - ▶ Identifikation der Effekte kategorialer Merkmale
  - ▶ Korrektur für Selektionseffekte
- Ich werde mich mit den ersten beiden Aspekten befassen (für die anderen beiden Punkte sei auf Oaxaca und Ransom 1999 und Yun 2005 sowie Neuman und Oaxaca 2004 verwiesen).

# Die Blinder-Oaxaca-Dekomposition

- Drei-Komponenten-Zerlegung (Winsborough und Dickinson 1971):  
Ausgehend vom linearen Modell

$$Y_j = X_j' \beta_j + \epsilon_j, \quad E(\epsilon_j) = 0, \quad j \in \{1, 2\}$$

kann der mittlere Gruppenunterschied  $R = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = \bar{X}_1' \hat{\beta}_1 - \bar{X}_2' \hat{\beta}_2$  zerlegt werden zu

$$R = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' \hat{\beta}_2 + \bar{X}_2' (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) + (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$$

Effekt der Ausstattung	Effekt der Koeffizienten	Interaktion
---------------------------	-----------------------------	-------------

$\bar{Y}$ : Mittelwert der Ergebnisvariable (z.B. logarithmierte Löhne)

$\bar{X}$ : Mittelwertsvektor der Regressoren (z.B. Bildung, Berufserfahrung, etc.)

# Die Blinder-Oaxaca-Dekomposition

- Zwei-Komponenten-Zerlegung:

$$R = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' \beta^* + \left[ \bar{X}_1'(\hat{\beta}_1 - \beta^*) + \bar{X}_2'(\beta^* - \hat{\beta}_2) \right]$$

„erklärter“                      „unerklärter“ Teil ( $U$ )  
Teil ( $Q$ )

wobei  $\beta^*$  ein Vektor von Referenzkoeffizienten ist (i.e. der Vektor der „nicht-diskriminierenden“ Koeffizienten).

- Alternative Formulierung:

$$R = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' [W\hat{\beta}_1 + (I - W)\hat{\beta}_2] \quad (\text{erklärter Teil})$$
$$+ [\bar{X}_1'(I - W) + \bar{X}_2'W](\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) \quad (\text{unerklärter Teil})$$

wobei  $W$  eine Matrize mit relativen Gewichten ist ( $I =$  Identitätsmatrize).

# Aspekt 1: Das Index-Nummer-Problem

- Wie ist  $\beta^*$  bzw.  $W$  in der Zwei-Komponenten-Zerlegung zu wählen?
- Einige Vorschläge:
  - ▶  $\beta^* = \hat{\beta}_1$  (bzw.  $W = I$ ) oder  $\beta^* = \hat{\beta}_2$  (bzw.  $W = 0$ ) (Oaxaca 1973; Blinder 1973)
  - ▶  $\beta^* = 0.5\hat{\beta}_1 + 0.5\hat{\beta}_2$  (bzw.  $W = 0.5I$ ) (Reimers 1983)
  - ▶ Relative Gruppengrößen als Gewichte (Cotton 1988)
- Weiterer populärer Vorschlag:
  - ▶ Verwendung der Koeffizienten eines über beide Gruppen zusammengefassten Modells als Schätzer für  $\beta^*$  (Neumark 1988)
  - ▶ äquivalent:  $W = (X_1'X_1 + X_2'X_2)^{-1}X_1'X_1$  (Oaxaca und Ransom 1994)
- Der letzte Vorschlag erscheint bestechend, ist aber fragwürdig, da ein Teil der Lohndifferenz in unangemessener Weise dem erklärten Teil zugeschlagen wird.



# Aspekt 1: Das Index-Nummer-Problem

- Gegeben sei ein einfaches Modell (z.B.  $Y$  = logarithmierter Lohn,  $Z$  = Bildung)

$$Y = \alpha + \gamma Z + \delta G + \epsilon$$

wobei  $\delta$  ein Diskriminierungsparameter ist ( $\delta < 0$ ) und  $G$  ein Indikator für das Geschlecht (1 falls weiblich).

- Wird nun  $\gamma^*$  aus einem „gepoolten“ Modell

$$Y = \alpha^* + \gamma^* Z + \epsilon^*$$

in die Dekomposition eingesetzt, erhalten wir für den erklärten Teil

$$Q = (\bar{Z}_M - \bar{Z}_F)\gamma^* = (\bar{Z}_M - \bar{Z}_F) \left( \gamma + \delta \frac{\text{Cov}(Z, G)}{\text{Var}(Z)} \right)$$

(Standardresultat aus der Theorie der weggelassenen Variablen).

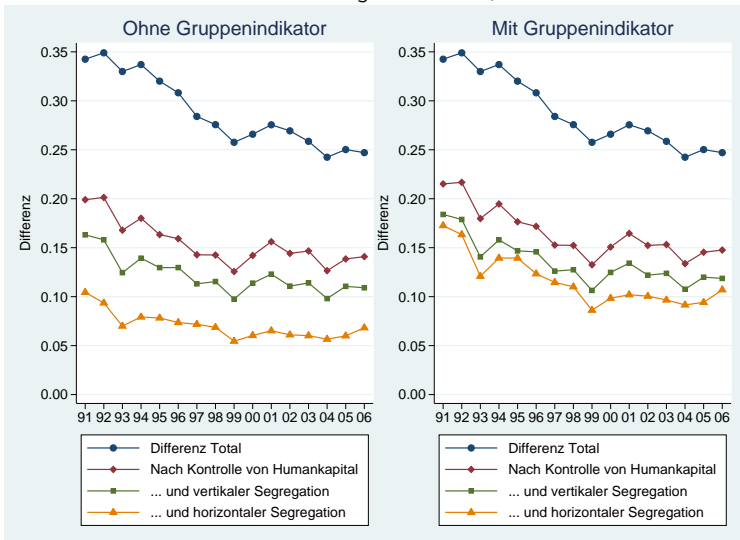
# Aspekt 1: Das Index-Nummer-Problem

$$Q = (\bar{Z}_M - \bar{Z}_F)\gamma^* = (\bar{Z}_M - \bar{Z}_F) \left( \gamma + \delta \frac{\text{Cov}(Z, G)}{\text{Var}(Z)} \right)$$

- Sind nun Männer im Schnitt besser ausgebildet als Frauen, ist  $\text{Cov}(Z, G)$  positiv und  $Q$  wird überschätzt (gegeben  $\gamma > 0$  und  $\delta < 0$ ).
- Faktisch heisst das, dass ein Teil des Lohnunterschiedes zwischen Männern und Frauen durch das Geschlecht erklärt wird.
- Um das angesprochene Problem zu vermeiden, sollte im gepoolten Modell also immer auch ein Indikator für die Gruppenzugehörigkeit enthalten sein, was aber in der bisherigen Literatur meistens übersehen wurde.
- Und es macht wirklich einen Unterschied ...

# Das Index-Nummer-Problem: Beispiel

- Lohnunterschiede zwischen Frauen und Männern in der Schweiz  
(Schweizerische Arbeitskräfteerhebung 1991-2006, Bundesamt für Statistik)



## Aspekt 2: Statistische Inferenz

- Die Berechnung der Komponenten der Blinder-Oaxaca-Dekomposition ist trivial: Koeffizienten gruppenspezifischer OLS-Modelle und Mittelwerte der Regressoren schätzen und in die Formeln einsetzen.
- Die Bezifferung der statistischen Unsicherheit scheint etwas mehr Probleme zu bereiten. Zumindest werden in den meisten Anwendungen keine Standardfehler oder Konfidenzintervalle berichtet.
- Eine adäquate Interpretation der Resultate ist aber leider ohne ungefähre Angaben zur statistischen Präzision nur schlecht möglich.

## Aspekt 2: Statistische Inferenz

- Ein erster Vorschlag zur Berechnung der Standardfehler wurde von Oaxaca und Ransom (1998) gemacht (vgl. auch Greene 2003:53–54).
- Oaxaca und Ransom gehen (implizit) von fixen Regressoren aus und vernachlässigen somit eine wichtige Quelle statistischer Unsicherheit.
- Dass die stochastische Natur der Regressoren für die Varianzen in Regressionsmodellen vernachlässigt werden kann, ist ein zentrales Resultat der Ökonometrie. Dies lässt sich jedoch nicht auf die Blinder-Oaxaca-Dekomposition übertragen.

## Aspekt 2: Statistische Inferenz

- Wie lässt sich die Varianz eines Ausdrucks  $\bar{X}'\hat{\beta}$  schätzen?
  - ▶ Wenn die Regressoren fix sind, dann ist  $\bar{X}$  konstant. Somit:

$$\hat{V}(\bar{X}'\hat{\beta}) = \bar{X}'\hat{V}(\hat{\beta})\bar{X}$$

- ▶ Wenn die Regressoren jedoch stochastisch sind, erhalten wir

$$\hat{V}(\bar{X}'\hat{\beta}) = \bar{X}'\hat{V}(\hat{\beta})\bar{X} + \hat{\beta}'\hat{V}(\bar{X})\hat{\beta} + \text{tr}\left(\hat{V}(\bar{X})\hat{V}(\hat{\beta})\right)$$

(Beweis im Anhang; aus den Standardannahmen der Regression folgt, dass  $\bar{X}$  und  $\hat{\beta}$  unkorreliert sind).

- ▶ Der letzte Term,  $\text{tr}(\dots)$ , ist asymptotisch vernachlässigbar.

## Aspekt 2: Statistische Inferenz

- Dieses Ergebnis lässt sich nun unmittelbar übertragen auf die Komponenten der Dekomposition. Beispielsweise (angenommen die Gruppen sind unabhängig):

$$\begin{aligned}\widehat{V}([\bar{X}_1 - \bar{X}_2]' \hat{\beta}_2) &\approx (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' \widehat{V}(\hat{\beta}_2) (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \\ &\quad + \hat{\beta}_2' \left[ \widehat{V}(\bar{X}_1) + \widehat{V}(\bar{X}_2) \right] \hat{\beta}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{V}(\bar{X}_2' [\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2]) &\approx \bar{X}_2' \left[ \widehat{V}(\hat{\beta}_1) + \widehat{V}(\hat{\beta}_2) \right] \bar{X}_2 \\ &\quad + (\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_2)' \widehat{V}(\bar{X}_2) (\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_2)\end{aligned}$$

- Ähnliche Formeln lassen sich für die anderen Varianten der Dekomposition herleiten (am einfachsten mit Hilfe der Delta-Methode). Auch die Verallgemeinerung auf komplexe Surveydaten ist einfach möglich.

## Aspekt 2: Statistische Inferenz

- Monte-Carlo-Simulation: Relative Abweichungen der Varianzschätzer

	$n = 1000$		$n = 5000$	
	fix	stochastisch	fix	stochastisch
Mittelwert Gruppe A	-0.505	-0.007	-0.505	-0.009
Mittelwert Gruppe B	-0.392	0.015	-0.413	-0.023
Differenz	-0.421	-0.005	-0.430	-0.025
$W = 0$ :				
– erklärt	-0.790	0.016	-0.802	-0.023
– unerklärt	-0.057	0.001	-0.048	0.008
$W = I$ :				
– erklärt	-0.888	0.007	-0.892	-0.010
– unerklärt	-0.140	-0.009	-0.132	-0.007



## Aspekt 2: Statistische Inferenz

- Anwendungsbeispiel: Lohnunterschiede zwischen Frauen und Männern in der Schweiz (Schweizerische Arbeitskräfteerhebung 2000)

	$\hat{\theta}$	Standardfehler			
		fix	stochastisch	Bootstrap	Jackknife
Mittelwert Männer	3.808	0.00605	0.00732	0.00729	0.00731
Mittelwert Frauen	3.568	0.0100	0.0115	0.0116	0.0115
Differenz	0.241	0.0117	0.0136	0.0137	0.0136
$W = 0$ :					
– erklärt	0.0976	0.00705	0.00987	0.0101	0.0101
– unerklärt	0.143	0.0136	0.0136	0.0135	0.0137
$W = 1$ :					
– erklärt	0.113	0.00418	0.00820	0.00821	0.00815
– unerklärt	0.128	0.0125	0.0126	0.0125	0.0126

- Es wurde gezeigt, dass ...
  - ▶ ... bei der Schätzung der Referenzkoeffizienten der Dekomposition anhand eines „gepoolten“ Modells für die Gruppenzugehörigkeit kontrolliert werden sollte,
  - ▶ ... Formeln für die Standardfehler einfach herzuleiten sind
  - ▶ ... und der stochastischen Natur der Regressoren bei der Schätzung der Standardfehler Rechnung getragen werden sollte.
- Benutzerfreundliche Software für den Einsatz des Blinder-Oaxaca-Verfahrens in der angewandte Forschung wurde verfügbar gemacht.
  - ▶ Jann, Ben (2008). The Blinder-Oaxaca decomposition for linear regression models. The Stata Journal 8: 453-479.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

# Beweis I

LEMMA: Die Varianz des Produkts von zwei unkorrelierten Zufallsvektoren ist

$$V(u_1' u_2) = \mu_1' \Sigma_2 \mu_1 + \mu_2' \Sigma_1 \mu_2 + \text{tr}(\Sigma_1 \Sigma_2)$$

wobei  $u_j \sim (\mu_j, \Sigma_j)$ ,  $j = 1, 2$

BEWEIS: Es gilt

$$E(x + y) = E(x) + E(y), \quad E(xy) = E(x)E(y) + \text{Cov}(x, y)$$

Wenn  $u_1$  und  $u_2$  unkorreliert sind, folgt

$$E(u_1' u_2) = \mu_1' \mu_2, \quad E(u_j u_j') = \mu_j \mu_j' + \Sigma_j$$

## Beweis II

und

$$\begin{aligned} E([u'_1 u_2]^2) &= E(u'_1 u_2 u'_2 u_1) = \text{tr}(E(u_1 u'_1 u_2 u'_2)) \\ &= \text{tr}(E(u_1 u'_1) E(u_2 u'_2)) \\ &= \text{tr}((\mu_1 \mu'_1 + \Sigma_1)(\mu_2 \mu'_2 + \Sigma_2)) \\ &= \text{tr}(\mu_1 \mu'_1 \mu_2 \mu'_2) + \text{tr}(\mu_1 \mu'_1 \Sigma_2) \\ &\quad + \text{tr}(\Sigma_1 \mu_2 \mu'_2) + \text{tr}(\Sigma_1 \Sigma_2) \\ &= (\mu'_1 \mu_2)^2 + \mu'_1 \Sigma_2 \mu_1 + \mu'_2 \Sigma_1 \mu_2 + \text{tr}(\Sigma_1 \Sigma_2) \end{aligned}$$

Schliesslich:

$$\begin{aligned} V(u'_1 u_2) &= E([u'_1 u_2]^2) - [E(u'_1 u_2)]^2 \\ &= \mu'_1 \Sigma_2 \mu_1 + \mu'_2 \Sigma_1 \mu_2 + \text{tr}(\Sigma_1 \Sigma_2) \end{aligned}$$

# Populationswerte der Simulation

		Gruppe A	Gruppe B			Gruppe A	Gruppe B
$X_1$	Mittelwert	1.0	0.5	$\beta_0$	1.0	0.5	
	Varianz	1.0	2.0	$\beta_1$	1.0	0.5	
$X_2$	Mittelwert	1.0	0.7	$\beta_2$	1.0	1.3	
	Varianz	1.0	1.5	$\sigma$	1.0	2.0	
Kovarianz ( $X_1, X_2$ )		−0.5	−0.3				
Populationsanteil		0.6	0.4				

# Regressionsmodelle SAKE 2000

	Männer		Frauen	
	Koeffizient	Mittelwert	Koeffizient	Mittelwert
Bildungsjahre	0.0770 (0.0028)	12.17 (0.042)	0.0768 (0.0051)	11.73 (0.056)
Berufserfahrung (in Jahren)	0.0216 (0.0018)	19.59 (0.23)	0.0289 (0.0034)	14.35 (0.29)
Berufserfahrung <sup>2</sup> /100	-0.0305 (0.0040)	5.279 (0.10)	-0.0540 (0.0084)	3.154 (0.12)
Firmentreue (in Jahren)	0.00260 (0.00077)	10.62 (0.18)	0.00650 (0.0015)	7.651 (0.22)
Vorgesetztenfunktion	0.139 (0.012)	0.558 (0.0093)	0.0482 (0.021)	0.386 (0.014)
Konstante	2.504 (0.039)		2.353 (0.067)	
R-Quadrat	0.316		0.238	
Fallzahl	2825		1287	

*Quelle:* Schweizerische Arbeitskräfteerhebung (SAKE) 2000, ungewichtet.

*Anmerkungen:* Abhängige Variable ist der logarithmierte Bruttolohn; Standardfehler in Klammern; Auswahl: Vollzeitbeschäftigte (mit nur einer Stelle) im Alter von 20 bis 62 Jahren, ohne Ausländer.

(Jann 2008a:161)

- Blinder, Alan S. (1973). Wage Discrimination: Reduced Form and Structural Estimates. The Journal of Human Resources 8: 436-455.
- Cotton, Jeremiah (1988). On the Decomposition of Wage Differentials. The Review of Economics and Statistics 70: 236-243.
- Greene, William H. (2003). Econometric Analysis. 5. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- Jann, Ben (2008a). Erwerbsarbeit, Einkommen und Geschlecht. Studien zum Schweizer Arbeitsmarkt. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Jann, Ben (2008b). The Blinder-Oaxaca decomposition for linear regression models. The Stata Journal 8: 453-479.
- Mincer, Jacob (1974). Schooling, Experience and Earnings. New York and London: Columbia University Press.



# Literaturhinweise II

- Neuman, Shoshana, Ronald L. Oaxaca (2004). Wage decompositions with selectivity-corrected wage equations: A methodological note. *Journal of Economic Inequality* 2: 3-10.
- Neumark, David (1988). Employers' Discriminatory Behavior and the Estimation of Wage Discrimination. *The Journal of Human Resources* 23: 279-295.
- Oaxaca, Ronald (1973). Male-Female Wage Differentials in Urban Labor Markets. *International Economic Review* 14: 693-709.
- Oaxaca, Ronald L., Michael R. Ransom (1994). On discrimination and the decomposition of wage differentials. *Journal of Econometrics* 61: 5-21.
- Oaxaca, Ronald L., Michael Ransom (1998). Calculation of approximate variances for wage decomposition differentials. *Journal of Economic and Social Measurement* 24: 55-61.
- Oaxaca, Ronald L., Michael R. Ransom (1999). Identification in Detailed Wage Decompositions. *The Review of Economics and Statistics* 81: 154-157.

- Reimers, Cordelia W. (1983). Labor Market Discrimination Against Hispanic and Black Men. *The Review of Economics and Statistics* 65: 570-579.
- Yun, Myeong-Su (2005). A Simple Solution to the Identification Problem in Detailed Wage Decompositions. *Economic Inquiry* 43: 766-772.
- Weichselbaumer, Doris, Rudolf Winter-Ebmer (2005). A Meta-Analysis of the International Gender Wage Gap. *Journal of Economic Surveys* 19: 479-511.